II. Tensory kartezjańskie (MAT2A1)

Uwagi dotyczące zapisu równań fizyki matematycznej

Równania fizyki początkowo zapisywano w formie analitycznej [Galileo-Galilei (1564-**1642**) - „Rozmowy i dowodzenia matematyczne w zakresie dwóch nowych umiejętności" (1638), Isaac Newton (**1642**-1727) - Philosophiae Naturalis Principia Mathematica (1687), James Clerc Maxwell (1831-**1879**) - Treatise on Electricity and Magnetism (1863)], później bardzo rozpowszechniła się symbolika wektorowa a następnie zapis tensorowy kartezjański [Tulio Levi Civita (1873-1942), Gregorio Ricci-Curbastro (1853-1925) oraz związany z dowolnymi układami współrzędnych [np. Einstein Albert (**1879**- 1955)- General Relativity -1916]. Jednak dopiero zewnętrzne formy różniczkowe dają najprostszy geometryczny zapis [Elie Cartan (1869-1951) - General Relativity with Spin and Torsion (1922-25)].

Jednak prawdziwym przełomem w matematyce (geometrii) od czasu Euklidesa z Aleksandrii (365-300 p.n.e.), autora monumentalnego dzieła „Elementy" - [13 ksiąg - I-IV Planimetria, V-ogólna teoria proporcji, VI-IX arytmetyka, X-niewymierności algebraiczne, XI-XIII - stereometria] - była geometria Riemanna [Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), 10.VI.1854 wykład habilitacyjny pt. "O hipotezach leżących u podstaw geometrii"].

Układy współrzędnych.

Układ kartezjański i transformacje współrzędnych.

Uważa się, że kartezjański układ współrzędnych wprowadził René Descartes (1596-1650). Jednak faktycznie prawnik i matematyk francuski Pierre de Fermat (1601-1665) wcześniej od Kartezjusza i bardziej precyzyjnie rozwinął w geometrii metodę współrzędnych, wyprowadzając m.in. równanie prostej oraz równanie stożkowych. Wprowadził też regułę znajdowania ekstremum funkcji.

Współrzędne kartezjańskie punktu oznaczamy przez $x_1=x$, $x_2=y$, $x_3=z$, czyli krótko: x_i $(i=1,2,3)$.

Uwaga 1.

Mały wskaźnik łaciński rezerwujemy dla przestrzeni trójwymiarowej i ogólnie n-wymiarowej, jednak z pewnymi wyjątkami. Wskaźniki spinorowe A=1,2 - oznaczamy dużymi literami alfabetu łacińskiego (jak również wskaźniki nie podlegające sumowaniu w przestrzeni trójwymiarowej oraz ogólnie n-wymiarowej); wskaźniki bispinorowe $\hat{A} = 1,2,3,4$. W przestrzeni czterowymiarowej (np. *pseudoeuklidesowej H. Minkowskiego*, czy też przestrzeni *riemannowskiej* (GR-*General Relativity*-OTW) , względnie ogólniejszych przestrzeniach *nieriemannowskich* (np. Riemanna-Cartana), wykorzystujemy małe wskaźniki greckie $\alpha=0,1,2,3$). Współrzędne afiniczne punktu oznaczamy, zgodnie z umową przez x^i $(i=1,2,...,n)$. Jeżeli w geometrii afinicznej wprowadzimy metrykę, realizując tym samym przejście do geometrii euklidesowej (tensor metryczny g_{ij} ustalony „raz na zawsze") to pojawią się obok współrzędnych *kontrawariantnych* punktu x^i, również jego współrzędne *kowariantne* $x_i:=g_{ij}x^j$ (stąd też $x^i=g^{ij}x_j$, gdzie g^{ij} jest tensorem odwrotnym, tzn. $g_{ij}g^{jk}=\delta_i^k$). W szczególności w układzie kartezjańskim współrzędne kontrawariantne $x^i=\delta^{ij}x_j=x_i$ - czyli są identyczne z współrzędnymi kowariantnymi, można je zatem pisać na „dole" lub na „górze". Na ogół pisze się je na „dole". Współrzędne punktu w czasoprzestrzeni Minkowskiego, oznacza się odpowiednio: $X^0 = ct$, $X^1 = x$, $X^2 = y$, $X^3 = z$. Współrzędne kowariantne $X_\mu = \eta_{\mu\nu}X^\nu$ zależą od sygnatury tensora metrycznego η (por. uwagi niżej). Współrzędne krzywoliniowe punktu oznaczamy literką rdzeniową χ z wskaźnikami „tradycyjnie" górnymi (np. χ^i

czy też χ^{II}). Powróćmy do „tensorów kartezjańskich", które są wstępem do właściwej analizy tensorowej.

Umowa I: mały wskaźnik łaciński występujący jeden raz, reprezentuje wszystkie „składowe", nie tylko jedną. Taki wskaźnik nazywa się wolnym. Na przykład A_i (i=1,2,3) jest wektorem **A**, tzn. jest to zbiór trzech składowych A_i (w dalszych rozważaniach będziemy rozróżniać „składowe" od „współrzędnych") i jednocześnie każda, konkretna z nich dla określonego wskaźnika i.

Rozważmy dwa nieskończenie blisko leżące punkty na krzywej (np. ruch punktu materialnego wzdłuż krzywej $x_i=x_i(t)$). Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że w przestrzeni euklidesowej

$$ds^2 = \sum_{a=1}^{3} dx_a dx_a = dx_a dx_a = \delta_{ab} dx_a dx_b \,, \qquad \text{gdzie} \qquad \delta_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{II.1}$$

Zauważmy, że relację tę możemy też formalnie zapisać (zgodnie z powyższą uwagą 1) w postaci

$$ds^2 = \delta_{ab} dx^a dx^b = \delta^{ab} dx_a dx_b \tag{II.1'}$$

gdzie macierz odwrotna δ^{ab} ma też postać „jedynkową".

W powyższym, uproszczonym zapisie, zastosowaliśmy następującą umowę

Umowa II: gdy mały wskaźnik łaciński powtarza się dwukrotnie oznacza to sumę po wszystkich wartościach tego wskaźnika. W przestrzeni trójwymiarowej będzie to suma od 1 do 3. W tej sytuacji opuszczamy znak sumy (por. relacja /1/). Wskaźniki sumacyjne „*są nieme*", ponieważ mogą być oznaczane dowolną literą (zastąpienie ich inną literą często wykorzystuje się w przekształceniach). Każdej sumie w sumowaniu wielokrotnym musi być przyporządkowana inna para wskaźników. Ponieważ w kartezjańskim układzie współrzędnych operujemy tylko wskaźnikami dolnymi więc sumowanie (siłą rzeczy) obejmuje tylko wskaźniki dolne. W ogólniejszych przypadkach, które rozważamy zgodnie z uwagą 1, sumuje się tylko powtarzające się wskaźniki z których jeden jest górnym a drugi dolnym (por. /1'/).

Podkreślmy wyraźnie, że relacja /1/ jest słuszna w przestrzeni trójwymiarowej (a,b=1,2,3) oraz wielowymiarowej (a,b=1,2,...,n). Określa ona tzw. metryczną formę kwadratową, która na ogół jest określona dodatnio, ale nie zawsze. W STW (*Special Relativity*) odwzorowywuje się przestrzeń zdarzeń w czterowymiarową przestrzeń pseudoeuklidesową *H. Minkowskiego* o metrycznej formie kwadratowej $ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dX^\alpha dX^\beta$ gdzie tensor metryczny η może być postaci

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{lub} \qquad \eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{II.1''}$$

Zauważmy, że w pierwszym przypadku w tzw. układzie współporuszającym się (poruszający się punkt materialny, np. cząstka ośrodka w polu fali sprężystej lub rakieta kosmiczna) $ds^2 = -c^2 d\tau^2 \le 0$, natomiast w drugim $ds^2 = c^2 d\tau^2 \ge 0$.

Uwaga 2

Symbol delta Kroneckera określony w pewnym układzie współrzędnych relacjami /1/ jest tensorem symetrycznym (rzędu 2), ponieważ przy transformacji:

$$x'_a = c_{ab} x_b + \overset{o}{x}_a \tag{II.2}$$

- zauważmy, że różnice współrzędnych będą się transformowały według relacji: $\Delta x'_k = c_{kl}\Delta x_l$ - jego reguła transformacyjna jest postaci

$$\delta'_{ab} = c_{ak}c_{bl}\,\delta_{kl} = c_{ak}c_{bk} = \delta_{ab} \tag{II.2'}$$

co wynika z faktu, że transformacje określone relacją /2/ są ortogonalne (por. dalsze uwagi).
Tak więc delta Kroneckera jest tensorem rzędu dwa mającym te same wartości we wszystkich układach współrzędnych.
Oczywiście jeżeli ograniczymy się tylko do obrotów to relację /2/ zapiszemy w postaci

$$x'_k = c_{kl}x_l \tag{II.2''}$$

Zastanówmy się teraz jakie warunki muszą być spełnione by Δs^2 było niezmiennikiem? Zauważmy, że wzór na odległość nie zmienia się gdy $\Delta s^2 = \Delta x_a \Delta x_a = \Delta x'_a \Delta x'_a$ (transformacje zachowujące niezmienioną odległość nazywa się izometrycznymi), tzn.

$$\Delta x'_k \Delta x'_k = c_{ka}\Delta x_a c_{kb}\Delta x_b = c_{ka}c_{kb}\Delta x_a \Delta x_b = \Delta x_a dx_a = \delta_{ab}\Delta x_a \Delta x_b, \qquad \text{czyli}$$

$$c_{ka}c_{kb} = \delta_{ab} \tag{II.3}$$

Transformacja spełniająca te związki nazywa się transformacją ortogonalną.
Zauważmy, że z relacji /3/ wynika: $\left[\det(c_{ab})\right]^2 = \det(c_{ak})\det(c_{kb}) = \det(c_{ak}c_{kb}) = \det(\delta_{ab}) = 1$, stąd

$$\det(c_{ab}) = +1 \text{ albo } \det(c_{ab}) = -1. \tag{II.4}$$

Ponieważ jakobian transformacji jest różny od zera więc istnieje transformacja odwrotna

$$\Delta x_b = c'_{ba}\Delta x'_a \tag{II.5}$$

Zauważmy, że $\Delta x'_a = c_{ab}\Delta x_b = c_{ab}c'_{bk}\Delta x'_k = \delta_{ak}\Delta x'_k$, czyli

$$c_{ab}c'_{bk} = \delta_{ak} \tag{II.6}$$

Mnożąc obie strony przez c_{al} otrzymuje się $c_{al}c_{ab}c'_{bk} = \delta_{lb}c'_{bk} = c'_{lk} = c_{al}\delta_{ak} = c_{kl}$. Ostatecznie

$$c'_{lk} = c_{kl} \tag{II.7}$$

Tak więc macierz współczynników transformacji odwrotnej do ortogonalnej jest dana przez macierz transponowaną. Transformacja odwrotna do ortogonalnej jest znowu ortogonalna, tj. $c'_{ka}c'_{kb} = \delta_{ab}$.
Spełnione są także związki: $c_{ak}c_{bk} = \delta_{ab}$ oraz $c'_{ak}c'_{bk} = \delta_{ab}$.
Transformacje ortogonalne tworzą grupę. Transformacje właściwe (o wyznaczniku +1) tworzą podgrupę tej grupy. Transformacje niewłaściwe prowadzą od układu prawoskrętnego do lewoskrętnego (transformacją niewłaściwą jest w szczególności odbicie, czyli zmiana znaku jednej współrzędnej).
Przypomnijmy. Liniowe, niejednorodne właściwe transformacje ortogonalne reprezentują obroty układu współrzędnych, połączone z ewentualną translacją. Współczynniki c_{ab} są kosinusami kątów między osiami x_a' układu O' i osiami x_b układu O, tj. $c_{ab} = \cos(x'_a, x_b)$.

Istotnie rozważmy wektor **x** w tych układach: $\vec{x} = x_i\vec{e}_i = x'_i\vec{e}'_i$, $\vec{x}\cdot\vec{e}_i = |\vec{x}||\vec{e}_i|\cos\alpha = |\vec{x}|\cos\alpha = x_i$, $\vec{x} = x_j\vec{e}_j = (\vec{x}\cdot\vec{e}_j)\vec{e}_j$., gdy **x=e$_i$'** to $\vec{e}'_i = (\vec{e}'_i\cdot\vec{e}_j)\vec{e}_j = c_{ij}\vec{e}_j \rightarrow \underline{\vec{e}'_i = c_{ij}\vec{e}_j}$. Z drugiej strony $\vec{x}\cdot\vec{e}'_i = |\vec{x}||\vec{e}'_i|\cos\alpha' = x'_i$, $\vec{x} = x'_j\vec{e}'_j = (\vec{x}\cdot\vec{e}'_j)\vec{e}'_j = (\vec{e}'_j\cdot\vec{x})\vec{e}'_j$ gdy **x=e$_i$** ,

$\vec{e}_i = \left(\vec{e}_i \cdot \vec{e}'_j\right)\vec{e}'_j = c'_{ij}\vec{e}'_j \;\rightarrow\; \underline{\vec{e}_i = c'_{ij}\vec{e}'_j}$ lub $\vec{e}_i = \left(\vec{e}'_j \cdot \vec{e}_i\right)\vec{e}'_j = c_{ji}\vec{e}'_j \;\rightarrow\; \underline{\vec{e}_i = c_{ji}\vec{e}'_i}$ stąd $\underline{c'_{ij} = c_{ji}}$

Analogiczne wyrażenia otrzymuje się dla współrzędnych $\vec{x} = x_i\vec{e}_i = x'_i\vec{e}'_i = \ldots$ $\rightarrow x'_i\vec{e}'_i = x_i c'_{ij} e'_j = x_i c_{ji}\vec{e}'_j = x'_j\vec{e}'_j$, postępując dalej analogicznie $x_i\vec{e}_i = x'_i c_{ij}\vec{e}_j = c'_{ji}x'_i\,\vec{e}_j = x_j\vec{e}_j$, stąd

$$x'_i = c_{ij}x_j \qquad\qquad x_i = c'_{ij}x_j \tag{II.8}$$

Ponieważ, jak się przekonaliśmy powyżej, metryczna forma kwadratowa jest niezmiennikiem więc jeżeli rozważymy teraz np. dwa inercjalne (słuszne są w nich prawa dynamiki Newtona) układy: współporuszający się K' z prędkością v względem układu laboratoryjnego K, więc na podstawie relacji /1''/ otrzymamy: $ds^2 = -c^2dt'^2 = -c^2dt^2 + (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2$ lub, wykorzystując drugą postać tensora η, $ds^2 = c^2dt'^2 = c^2dt^2 - (dx_1)^2 - (dx_2)^2 - (dx_3)^2$. Oznaczając t'=τ otrzymamy (słuszny dla obu postaci η) słynny w STW wzór określający czas własny τ (tj. czas mierzony przez zegar poruszającej się np. rakiety, cząstki ruchomego fluidu, wiatru słonecznego itp.) przez czas współrzędnościowy t (tj. czas mierzony przez zegar wyrzutni rakietowej, zegar związany z Ziemią, badaną warstwą itp.)

$$d\tau = dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{II.9}$$

Powróćmy jeszcze do relacji /1/. Wprowadźmy teraz dowolne współrzędne krzywoliniowe χ^i, które określimy przez współrzędne afiniczne x^i (lub kartezjańskie $x^i=x_i$) relacjami: $x^i = x^i(\chi^1,\ldots,\chi^n)$. Zakładamy, że funkcje te są tak wybrane, że przekształcenie to jest odwracalne, tj. $\chi^i = \chi^i(x^1,\ldots,x^n)$. O funkcjach tych zakładamy, że są ogólnie klasy C_k. Relacja /1/ przyjmie teraz postać:

$$ds^2 = \delta_{ab}dx^a dx^b = \delta_{ab}\frac{\partial x^a}{\partial \chi^i}\frac{\partial x^b}{\partial \chi^j}d\chi^i d\chi^j = g_{ij}d\chi^i d\chi^j . \tag{II.10}$$

gdzie oznaczyliśmy

$$g_{ij} = \delta_{ab}\frac{\partial x^a}{\partial \chi^i}\frac{\partial x^b}{\partial \chi^j} \tag{II. /11}$$

W przestrzeni euklidesowej tensor metryczny **g** jest ustalony „raz na zawsze" (por. dalsze uwagi), ale oczywiście w każdym konkretnym układzie współrzędnych krzywoliniowych ma na ogół inną postać, wynikającą z relacji /11/. Rozważmy np. układ współrzędnych sferycznych $:\chi^1 = r,\;\; \chi^2 = \theta,\;\; \chi^3 = \varphi$, określony relacjami: $x_1 = x^1 = r\sin\theta\cos\varphi,\;\; x_2 = x^2 = r\sin\theta\sin\varphi$, $x_3 = x^3 = r\cos\theta$. Z relacji /11/ wynika, że tensor metryczny będzie postaci

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{II.12}$$

Istotnie pamiętamy jeszcze z szkoły średniej, że $ds^2 = dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2$, czyli rzeczywiście współczynniki przy różniczkach odpowiednich zmiennych $(ds^2 = g_{ij}d\chi^i d\chi^j)$ pokrywają się z współrzędnymi tensora /12/.

Powyżej rozpatrywaliśmy przestrzenie metryczne, tj. scharakteryzowane przez tensor metryczny. Przestrzeń spinorowa, wykorzystywana w kwantowej teorii pola, jest przestrzenią scharakteryzowaną antysymetrycznym tensorem symplektycznym

$$\varepsilon_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(II.13)}$$

i nazywamy ją przestrzenią symplektyczną. Związana z nią grupa przekształceń SL(2,C) powoduje, że biliniowa forma $\varepsilon_{AB}\xi^A\eta^B = \xi^1\eta^2 - \xi^2\eta^1$ jest niezmiennicza, gdzie ξ^A, η^B są spinorami, tj. elementami tej przestrzeni. Przypomnijmy, że w zapisie rozważanej grupy przekształceń - S oznacza, że jest to grupa specjalna o wyznaczniku równym jedności, L oznacza że jest to grupa liniowa, natomiast 2,C - oznacza grupę macierzy o elementach zespolonych i wymiarze 2×2.

Ogólne określenie tensorów

Niezmiennikiem lub skalarem nazywamy liczbę, która nie zmienia się przy transformacji od jednego układu współrzędnych do drugiego. Przy transformacjach ortogonalnych przykładem skalara jest odległość dwóch punktów. Formalnie możemy uważać, że skalary są tensorami rzędu zero.

Wektor polarny: ciąg trzech liczb A_k nazywamy wektorem, jeżeli przy transformacji /2/ od jednego układu współrzędnych do innego, liczby te transformują się jak odpowiednie różnice współrzędnych

$$A'_k = c_{kl}A_l \qquad A_k = c'_{kl}A'_l \qquad \text{(II.14)}$$

Tensor drugiego rzędu: układ dziewięciu liczb T_{kl} określonych w konkretnym układzie współrzędnych, które przy transformacji /2/, od jednego układu do innego, transformują się jak odpowiednie iloczyny różnic współrzędnych

$$T'_{ab} = c_{ak}c_{bl}T_{kl} \qquad T_{kl} = c'_{ka}c'_{lb}T'_{ab} \qquad \text{(II.15)}$$

A

nalogicznie określa się tensory wyższych rzędów. Tak np. tensor rzędu N to układ (macierz) 3^N liczb określonych w układzie x_k i transformujących się przy przejściu do układu x_k' następująco

$$T'_{i_1 \ldots\ldots i_N} = c_{i_1 j_1} c_{i_2 j_2} \ldots c_{i_N j_N} T_{j_1 \ldots\ldots j_N} \qquad \text{(II.16)}$$

Tensor jest macierzą, której wyrazy (współrzędne) są określone w jakimś układzie współrzędnych oraz transformują się w określony sposób przy przejściu od tego układu współrzędnych do innego. Tak więc nie każda macierz może być tensorem, podczas gdy każdy tensor jest macierzą. Macierz jest tensorem wtedy i tylko wtedy gdy jest określona w jakimś układzie współrzędnych oraz gdy jej współrzędne transformują się według. reguły tesorowej przy przejściu od jednego układu współrzędnych do innego.

Tensor N-tego rzędu ma w przestrzeni trójwymiarowej 3^N współrzędnych. Tensor rzędu 2 ma 9 współrzędnych, rzędu 3 ma 27 współrzędnych, rzędu 4 ma 81 współrzędnych. Natomiast w przestrzeni czterowymiarowej: tensor rzędu 2 ma 16 współrzędnych, rzędu 3 -64 współrzędnych, rzędu 4 - 256 współrzędnych.

Podamy teraz przykłady tensorów i równań (materiałowych) je wiążących:

$$j_k = \sigma_{kl} E_l , \quad B_k = \mu_{kl} H_l , \quad D_k = \varepsilon_{kl} E_l \quad , \quad E_k = \rho_{kl} j_l , \quad H_k = \nu_{kl} B_l , \quad E_k = \beta_{kl} D_l$$

$$P_k^{(e)} = \chi_{kl}^{(e)} E_l , \quad P_k^{(m)} = \chi_{kl}^{(m)} H_l \quad , \quad T_{kl} = c_{klmn} S_{mn} = c_{klmn} u_{(m,n)} \quad S_{kl} = s_{klab} T_{ab} \qquad \text{(II.17)}$$

Są to równania materiałowe elektrodynamiki i symetrycznej teorii sprężystości (ostatnie dwa równania). Występują w nich tensory odpowiednio: przewodności właściwej, przenikalności magnetycznej, elektrycznej, oporności właściwej, nieprzenikalności magnetycznej, elektrycznej, podatności elektrycznej, magnetycznej, sprężystości i sztywności. W zagadnieniach fizyki matematycznej dominują tensory rzędu dwa (inne procesy unoszenia - przewodnictwo cieplne, dyfuzja, filtracja). Są to również tensory podstawowych równań teorii pola. Tensorami rzędu trzy są tensory torsji, sprzężenia pól elektromagnetycznych i sprężystych. Tensorami rzędu cztery są tensory sprężystości, sztywności, krzywizny i in.. Równania, np. materiałowe w których występują są na ogół bardziej złożone. Tak np.

$$T_{ji} = a_{jikl}\gamma_{kl} + b_{jikl}\chi_{kl} - e_{kji}E_k - g_{kji}H_k - \eta_{ji}\Theta , \qquad \tau_{ji} = c_{jikl}\chi_{kl} + b_{klji}\gamma_{kl} - d_{kji}E_k - h_{kji}H_k$$

$$D_i = \varepsilon_{ij} E_j + e_{ijk}\gamma_{jk} + d_{ijk}\chi_{jk} + g_i\Theta \qquad B_i = \mu_{ji}H_j + g_{ijk}\gamma_{jk} + h_{ijk}\chi_{jk} + h_i\Theta$$

$$S = \eta_{ji}\gamma_{ji} + \varsigma_{ji}\chi_{ji} + g_i E_i + h_i H_i + \frac{c_\varepsilon}{T_o}\Theta . \qquad \text{(II.18)}$$

Ostatnie pięć równań opisuje pola sprzężone w hemitropowym, niecentrosymetrycznym, niejednorodno-anizotropowym kontinuum mikropolarnym. Własności fizyczne takiego ośrodka opisuje 321 niezależnych współrzędnych (funkcji punktu) tensorów: sprężystości (**a,b,c**), sprzężenia (piezoelektryczności i piezomagnetyczności(**d,e,g**)) i innych (*Gawin A., 1995*). W przypadku dokładniejszej, niesymetrycznej teorii sprężystości pola sprzężone w górotworze opisują takie właśnie równania materiałowe.

Algebra tensorów

Algebrę tensorową tworzą cztery podstawowe, niezmiennicze operacje tworzenia tensorów z tensorów. Są to operacje: dodawania, mnożenia, kontrakcji i przestawiania (tasowania) wskaźników. *Niezmienniczość tensorowych operacji* należy rozumieć w ten sposób, że zastosowane do danych tensorów określają je niezależnie od układu współrzędnych. Istniejące realnie różne obiekty fizyczne są na ogół tensorami a wiążące je równania są równaniami tensorowymi.

Dodawanie tensorów: dodawać lub odejmować można tensory tego samego rzędu i o tych samych wskaźnikach, np.

$$S_{kl} + T_{kl} = M_{kl} \quad , \qquad S_{i_1 \ldots i_p} + T_{i_1 \ldots i_p} = M_{i_1 \ldots i_p} \qquad \text{(II.19)}$$

Tak więc w każdym układzie współrzędnych dodajemy do każdej współrzędnej pierwszego tensora odpowiadającą jej współrzędną (tzn. współrzędną o tych samych wskaźnikach) drugiego tensora. Sprawdźmy, że istotnie operacja ta ma charakter niezmienniczy. Rzeczywiście:

$$M'_{kl} = S'_{kl} + T'_{kl} = c_{ka}c_{lb}S_{ab} + c_{ka}c_{lb}T_{ab} = c_{ka}c_{lb}\left(S_{ab} + T_{ab}\right) = c_{ka}c_{lb}M_{ab} . \qquad \text{(II.20)}$$

Tensor S_{kl} jest symetryczny jeżeli $S_{kl} = S_{lk}$, tj. gdy symetryczna jest macierz tworząca go. Tensor A_{kl} jest antysymetryczny jeżeli $A_{kl} = -A_{lk}$. Ponieważ np. $A_{11} = - A_{11}$ więc $A_{11}=0$ (analogicznie

A_{22}=A_{33}=0). Tensor symetryczny ma w przestrzeni trójwymiarowej sześć niezależnych współrzędnych podczas gdy asymetryczny tylko trzy

$$\begin{matrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ & S_{22} & S_{23} \\ & & S_{33} \end{matrix} \qquad\qquad \begin{matrix} 0 & A_{12} & A_{13} \\ & 0 & A_{23} \\ & & 0 \end{matrix}$$

Własności symetrii i antysymetrii tensora są niezależne od układu współrzędnych. Istotnie bowiem dla tensora symetrycznego mamy $S_{kl}' = c_{ka}c_{lb}S_{ab} = c_{lb}c_{ka}S_{ba} = S_{lk}'$, natomiast dla tensora asymetrycznego mamy: $A_{kl}' = c_{ka}c_{lb}A_{ab} = -c_{lb}c_{ka}A_{ba} = -A_{lk}'$.

Dowolny tensor rzędu (walencji) dwa można rozłożyć na część symetryczną i antysymetryczną. Istotnie:

$$T_{kl} = \frac{1}{2}\left(T_{kl} + T_{lk}\right) + \frac{1}{2}\left(T_{kl} - T_{lk}\right) = T_{(kl)} + T_{[kl]}, \qquad (II.21)$$

gdzie $T_{(kl)}$ jest częścią symetryczną, natomias $T_{[kl]}$ jest częścią asymetryczną. Nawiasy: (...) i [...] oznaczają odpowiednio operacje *symetryzacji* oraz *asymetryzacji*. Operacje te mają charakter niezmienniczy.

Mnożenie tensorów. W odróżnieniu od dodawania można mnożyć dowolne (mogą być różnego rodzaju) dwa tensory. Istotna jest kolejność czynników, ponieważ wynik mnożenia zależy od samych czynników jak i kolejności ich mnożenia. Tenory mnożymy mnożąc odpowiednie składowe. Dokładniej: w każdym układzie współrzędnych każdą współrzędną pierwszego tensora mnożymy przez każdą współrzędną drugiego tensora. W wyniku mnożenia otrzymuje się tensory wyższych rzędu. Rozważmy np. mnożenie dwóch wektorów A_k oraz B_l. W wyniku otrzymamy tensor o walencji dwa: $T_{kl} = A_k B_l$. Istotnie $T_{kl}' = A_k' B_l' = c_{ka}A_a c_{lb}B_b = c_{ka}c_{lb}A_a B_b = c_{ka}c_{lb}T_{ab}$, a to jest właśnie reguła transformacyjna tensorów rzędu dwa.

Zwężenie (kontrakcja) tensorów. Operacja zwężenia nie ma analogonu w zwykłej algebrze. Jeżeli w jakimś tensorze przyrównamy do siebie dwa wskaźniki oznacza to wg. umowy II sumowanie. Tak więc ilość wolnych wskaźników będzie o dwa mniejsza i taki też powinien być rząd tensora. Łatwo to wykażemy jak również fakt, że jest to operacja niezmiennicza. Rozważmy przykładowo tensor rzędu cztery R_{ijkl}, w którym przyrównamy pierwszy i trzeci wskaźnik, czyli $R_{ijil} = R_{jl}$. Istotnie łatwo zauważyć, że $T_{ijil}' = c_{ip}c_{jq}c_{ir}c_{ls}T_{pqrs} = c_{jq}c_{ls}\delta_{pr}T_{pqrs} = c_{jq}c_{ls}T_{pqps} = c_{jq}c_{ls}T_{qs} = T_{jl}'$

W wyniku zwężenia iloczynu dwóch wektorów otrzymuje się skalar. Istotnie $A_k B_k = \vec{A} \bullet \vec{B} = \mathbf{AB}$, który nazywa się iloczynem skalarnym (skalarowym) wektorów **A** i **B**. W szczególności gdy utożsamia się wektory to otrzymuje się $A_k A_k = \vec{A}^2 = |\vec{A}|^2 = A^2$, czyli kwadrat długości wektora. Tym samym długość wektora $A = |\vec{A}| = \sqrt{|\vec{A}|^2} = \sqrt{A_k A_k}$. Wzór $(\mathbf{AB})^2 = (A_k B_k)^2 = \mathbf{A}^2\mathbf{B}^2 = (A_k A_k)(B_l B_l)\cos^2\theta$ można uważać za definicję $\cos^2\theta$, gdzie θ jest kątem między wektorami **A** oraz **B**.

W dalszych rozważaniach bardzo istotne jest *twierdzenie: iloczyn podwójnie zwężony tensora symetrycznego i antysymetrycznego jest równy zeru.* Dowód: rozważmy tensor symetryczny $S_{ij} = S_{ji}$ oraz antysymetryczny $A_{pq} = -A_{qp}$. Iloczyn podwójnie zwężony to $S_{ij}A_{ij} = S_{ji}A_{ij} = -S_{ji}A_{ji} = -S_{ij}A_{ij}$, stąd dalej wynika, że $2S_{ij}A_{ij} = 0 \Rightarrow S_{ij}A_{ij} = 0$, c.n.u.

Symbol antysymetryczny. Symbolem zupełnie antysymetrycznym $\in_{i_1 i_2 \ldots i_N}$ w przestrzeni N-wymiarowej nazywa się symbol o N wskaźnikach $i_1, i_2, \ldots, i_N$, który jest równy: **+1** gdy wskaźniki są różne i tworzą permutację parzystą ciągu 1,2,....,N; **-1** gdy wskaźniki są różne ale tworzą permutację nieparzystą ciągu 1,2,....,N; **0** -jeżeli którekolwiek dwa wskaźniki są równe.

W przestrzeni trójwymiarowej symbol zupełnie antysymetryczny ma trzy wskaźniki $\in_{ijk}$. Jeżeli przetransformujemy $\in_{123}$ do innego układu, wykorzystując regułę transformacyjną dla tensora o walencji 3, to otrzymuje się: $\in'_{123} = c_{1k} c_{2l} c_{3m} \in_{123} = \det(c_{ab}) = 1$, gdy ograniczymy się do transformacji właściwych, czyli $\in'_{123} = \in_{123}$, przyjmuje te same wartości. Symbol zupełnie antysymetryczny przyjmuje te same wartości w każdym układzie, jeżeli transformuje się następująco:

$$\in'_{klm} = [\det(c_{ab})]^{-1} c_{kp} c_{lq} c_{mr} \in_{pqr} \qquad \text{(II.22)}$$

czyli tak jak tensor względny o wadze -1. Przy właściwych ransformacjach ortogonalnych powyższe prawo transformacji jest takie samo jak dla tensorów, natomiast przy transformacjach niewłaściwych, różni się od tensorowej reguły transformacyjnej jedynie znakiem. Dlatego też symbol zupełnie antysymetryczny naywa się też *pseudotensorem* lub *ekstensorem.*
Jeżeli ograniczymy się wyłącznie do układów prawoskrętnych to nie ma potrzeby odróżniania tensorów i pseudotensorów.

Symbol $\in_{\lambda_1 \ldots \lambda_n}$ lub ogólniej obiekt $g_{\lambda_1 \ldots \lambda_n} = \rho \in_{\lambda_1 \ldots \lambda_n}$, gdzie ρ jest dowolnym skalarem, jest tzw. gęstością kowariantną o wadze -1 (S.Gołąb, str. 101). Symbol $\in_{ikl}$ w przestrzeni trójwymiarowej, możemy przedstawić też w postaci wyznacznikowej, następująco

$$\in_{ikl} = \begin{vmatrix} \delta_{1i} & \delta_{1k} & \delta_{1l} \\ \delta_{2i} & \delta_{2k} & \delta_{2l} \\ \delta_{3i} & \delta_{3k} & \delta_{3l} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_{1i} & \delta_{2i} & \delta_{3i} \\ \delta_{1k} & \delta_{2k} & \delta_{3k} \\ \delta_{1l} & \delta_{2l} & \delta_{3l} \end{vmatrix} \qquad \text{(II.23)}$$

Iloczyn dwóch symboli zupełnie antysymetrycznych można zapisać następująco

$$\in_{ikl} \in_{mnp} = \begin{vmatrix} \delta_{1i} & \delta_{2i} & \delta_{3i} \\ \delta_{1k} & \delta_{2k} & \delta_{3k} \\ \delta_{1l} & \delta_{2l} & \delta_{3l} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \delta_{1m} & \delta_{2m} & \delta_{3m} \\ \delta_{1n} & \delta_{2n} & \delta_{3n} \\ \delta_{1p} & \delta_{2p} & \delta_{3p} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_{im} & \delta_{in} & \delta_{ip} \\ \delta_{km} & \delta_{kn} & \delta_{kp} \\ \delta_{lm} & \delta_{ln} & \delta_{lp} \end{vmatrix}$$

Istotnie, w wyniku mnożenia wyznaczników otrzymamy kolejne wyrazy pierwszego wiersza:

$$(..)_{11} = \delta_{1i}\delta_{1m} + \delta_{2i}\delta_{2m} + \delta_{3i}\delta_{3m} = \delta_{ki}\delta_{km} = \delta_{im} \qquad (..)_{12} = \delta_{1i}\delta_{1n} + \delta_{2i}\delta_{2n} + \delta_{3i}\delta_{3n} = \delta_{ki}\delta_{kn} = \delta_{in}$$

$$(..)_{13} = \delta_{1i}\delta_{1p} + \delta_{2i}\delta_{2p} + \delta_{3i}\delta_{3p} = \delta_{ki}\delta_{kp} = \delta_{ip}.$$

Analogicznie otrzymamy wyrazy pozostałych wier- szów . Dokonajmy teraz w powyższym iloczynie kontrakcji ostatnich wskaźników

$$\in_{ikp} \in_{mnp} = \begin{vmatrix} \delta_{im} & \delta_{in} & \delta_{ip} \\ \delta_{km} & \delta_{kn} & \delta_{kp} \\ \delta_{pm} & \delta_{pn} & \delta_{pp} \end{vmatrix} = 3\delta_{im}\delta_{kn} + \delta_{km}\delta_{pn}\delta_{ip} + \delta_{in}\delta_{kp}\delta_{pm} - \delta_{pm}\delta_{kn}\delta_{ip} - \delta_{im}\delta_{pn}\delta_{kp} - 3\delta_{km}\delta_{in} =$$

$$=3\delta_{im}\delta_{kn}+\delta_{km}\delta_{in}+\delta_{in}\delta_{km}-\delta_{kn}\delta_{mi}-\delta_{im}\delta_{kn}-3\delta_{km}\delta_{in}=\delta_{im}\delta_{kn}-\delta_{km}\delta_{in}\,.$$

Tak więc ostatecznie otrzymamy

$$\in_{ikp}\in_{mnp}=\delta_{im}\delta_{kn}-\delta_{km}\delta_{in} \qquad \in_{ikl}\in_{mkl}=2\delta_{im} \qquad \in_{ikl}\in_{ikl}=6 \tag{II.24}$$

Przykłady wykorzystania:

(1) *iloczyn wektorowy.* Podwójnie zwężony iloczyn dwóch wektorów i symbolu antysymetrycznego jest psudowektorem albo tzw. *wektorem osiowym, aksjalnym*

$$\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)_k=\in_{klm}A_lB_m \quad\rightarrow\quad \vec{A}\times\vec{B}=\in_{klm}A_lB_m\vec{e}_k\,. \tag{II.25}$$

Obliczmy poszczególne współrzędne

$$\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)_1=\in_{1lm}A_lB_m=\in_{123}A_2B_3+\in_{132}A_3B_2=A_2B_3-A_3B_2; \qquad \left(\vec{A}\times\vec{B}\right)_x=A_yB_z-A_zB_y$$
$$\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)_2=\in_{2lm}A_lB_m=\in_{231}A_3B_1+\in_{213}A_1B_3=A_3B_1-A_1B_3; \qquad \left(\vec{A}\times\vec{B}\right)_y=A_zB_x-A_xB_z$$
$$\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)_3=\in_{3lm}A_lB_m=\in_{321}A_2B_1+\in_{312}A_1B_2=A_1B_2-A_2B_1; \qquad \left(\vec{A}\times\vec{B}\right)_z=A_xB_y-A_yB_x$$

(2) *iloczyn skalarny iloczynu wektorowego* $\vec{A}\times\vec{B}$ *i wektora* $\vec{C}$, tj.

$$\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\bullet\vec{C}=\in_{klm}A_lB_mC_k \tag{II.26}$$

jest pseudoskalarem, tj. nie zmienia się przy transformacjach właściwych i zmienia znak przy transformacjach niewłaściwych. W szczególności, jeżeli **C=A**, to

$$\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\bullet\vec{A}=\in_{klm}A_lB_mA_k\equiv 0. \tag{II.27}$$

Tak więc istotnie iloczyn wektorowy dwóch wektorów jest prostopadły do każdego z nich.;

(3) *kwadrat iloczynu wektorowego*

$$\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)^2=\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)_k\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)_k=\in_{klm}A_lB_m\in_{kpq}A_pB_q=\left(\delta_{lp}\delta_{mq}-\delta_{lq}\delta_{mp}\right)A_lB_mA_pB_q=A_lA_lB_mB_m-$$
$$-\left(A_lB_l\right)\left(A_mB_m\right)=\vec{A}^2\vec{B}^2-\left(\vec{A}\bullet\vec{B}\right)^2,$$

co odpowiada znanej postaci wzoru z rachunku wektorowego

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})^2+(\mathbf{AB})^2=\mathbf{A}^2\mathbf{B}^2=A^2B^2 \tag{II.28}$$

Zauważmy dalej, że $\left(\vec{A}\bullet\vec{B}\right)^2=\left(|\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta\right)^2=|\vec{A}|^2|\vec{B}|^2\cos^2\theta=\vec{A}^2\vec{B}^2\cos^2\theta$, co uwzględniając w powyższym (relacja /21/) otrzymamy $\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)^2=\vec{A}^2\vec{B}^2\left(1-\cos^2\theta\right)=A^2B^2\sin^2\theta=\left(AB\sin\theta\right)^2$, czyli w istocie $|\vec{A}\times\vec{B}|=AB\sin\theta$,

Zauważmy, że składowe iloczynu wektorowego można zapisać też w postaci