Wszystkie pierwiastki z jedności

$$\sqrt[3]{1} = \cos\left(k\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(k\frac{2\pi}{3}\right) = e^{ik\frac{2\pi}{3}} \qquad k=0,1,2$$

$$k=0 \qquad \cos 0 + i\sin 0 = 1$$

$$k=1 \qquad \cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi = \cos 120^\circ + i\sin 120^\circ = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$k=2 \qquad \cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi = \cos 240^\circ + i\sin 240^\circ = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Funkcje trygonometryczne

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots \qquad \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots \qquad /1/$$

Szeregi są zbieżne dla każdej wartości z, a więc ich sumy są funkcjami całkowitymi przestępnymi, analogicznie jak szereg funkcji wykładniczej e^z.

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y) \qquad /2/$$

Twierdzenie. Funkcja wykładnicza jest funkcją okresową o okresie $2\pi i$. Istotnie

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = e^z$$

$$e^{zi} = \cos z + i\sin z \qquad e^{-zi} = \cos z - i\sin z$$

$$e^{zi} = 1 + \frac{zi}{1!} + \frac{(zi)^2}{2!} + \frac{(zi)^3}{3!} + \cdots = \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots\right)$$

$$\cos z = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i} \qquad /3/$$

$$\cos z = \frac{e^{(x+iy)i} + e^{-(x+iy)i}}{2} = \frac{1}{2}\left\{e^{-y+ix} + e^{y-ix}\right\} = \frac{1}{2}\left\{e^{-y}e^{ix} + e^{y}e^{-ix}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}e^{-y}(\cos x + i\sin x) + \frac{1}{2}e^{y}(\cos x - i\sin x) = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y})\cos x +$$

$$-i\frac{1}{2}(e^y - e^{-y})\sin x = \cosh y \cdot \cos x - i\sinh y \cdot \sin x$$

$$\cos z = \cosh y \cdot \cos x - i\sinh y \cdot \sin x \qquad \sin z = \cosh y \cdot \sin x + i\sinh y \cdot \cos x \qquad /4/$$

$$\sin z = \frac{1}{2i}\left\{e^{-y+ix} - e^{y-ix}\right\} = \frac{1 i}{2i^2}e^{-y}(\cos x + i\sin x) + \frac{i}{2}e^{y}(\cos x - i\sin x) =$$

$$= \frac{1}{2}(e^y + e^{-y})\sin x + i\frac{1}{2}(e^y - e^{-y})\cos x = \cosh y \sin x + i\sinh y \cos x$$

$\cos z = \frac{1}{2}(e^{zi}+e^{-zi})$ $\quad \cos(yi) = \frac{1}{2}(e^{-y}+e^{y}) = \cosh y$

$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{zi}-e^{-zi})$ $\quad \sin(yi) = \frac{1}{2}(e^{-y}-e^{y}) = -\frac{1}{2}(e^{y}-e^{-y}) = -\sinh y$

$\cos yi = \cosh y \quad \sin(yi) = -\sinh y \quad tg(yi) = -tgh\, y$ /5/

<u>Funkcje hiperboliczne</u> zmiennej zespolonej $\sinh z$, $\cosh z$

$\cosh z = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2} \quad \sinh z = \frac{e^{z}-e^{-z}}{2}$ /6/

$\sinh(zi) = \frac{1}{2}(e^{zi}-e^{-zi}) = i\sin z \quad \cosh(zi) = \frac{1}{2}(e^{zi}+e^{-zi}) = \cos z$

$\sin z = \frac{1}{i}\sinh(zi) \quad \cos z = \cosh(zi) \quad \sinh z = \frac{1}{i}\sin(zi) \quad \cosh z = \cos(zi)$ /7/

$Z = f(z)$, $X+iY = f(x+iy)$, $X = X(x,y)$, $Y = Y(x,y)$

<u>Funkcja logarytmiczna</u> zmiennej zespolonej

Jeżeli $e^{Z} = z$ to $\ln_e e^{Z} = \ln z$, $Z = \ln z$ - f. odwrotna, czyli f. logarytmiczna. Odpowiedniość odwrotna f. e^{Z}, czyli f. $Z = \ln z$ istnieje dla każdej wartości $z \neq 0$, jest jednak wieloznaczna, co wynika z okresowości funkcji e^{Z}

$e^{Z} = z = r(\cos\Theta + i\sin\Theta) \quad |z| = r,\ \arg z = \Theta$

$e^{Z} = e^{X+iY} = e^{X}(\cos Y + i\sin Y)$ czyli $e^{X} = r \quad Y = \Theta + k2\pi$

$\underline{Z = \ln z = X + iY = \ln r + i\Theta + i2\pi k} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ /8/

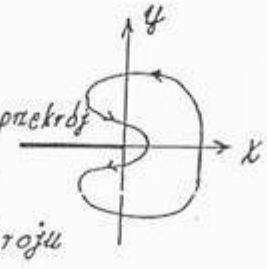
Ponieważ $e^{z+2\pi i} = e^{z}$ więc $\ln_e e^{z+2\pi i} = \ln_e e^{z}$ czyli

$e^{Z} = e^{\ln r + i(\Theta + k2\pi)} \quad \ln_e e^{Z} = Z = \ln z = \ln_e e^{\ln r + i(\Theta + k2\pi)}$

$\ln z = \ln r + i\Theta + ik2\pi \quad \underline{\ln z = \ln r e^{i\Theta + ik2\pi}} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ /9/

Podstawiając na k określoną l. całkowitą otrzymuje się z /8/, /9/ gałąź funkcji logarytmicznej. Punkt $z = 0$, przy okrążaniu którego zachodzą przemiany gałęzi logarytmu jedne w drugie (ich wartości różnią się o $2\pi i$) nazywa się <u>punktem rozgałęzienia</u> lub punktem krytycznym funkcji logarytmicznej.

Dokonując cięcia wzdłuż ujemnej osi x, funkcja $\ln z$ będzie jednoznaczną funkcją, dokładniej funkcją holomorficzną, tj. funkcją mającą pochodną $(\ln z)' = \frac{1}{z}$ w każdym p. płaszczyzny bez punktów przekroju



Funkcje holomorficzne

$Z = X + iY \qquad X = X(x,y) \quad Y = Y(x,y) \qquad Z = f(z) \qquad z = x + iy$

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L \iff \bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\eta > 0} 0 < |z - z_0| < \eta \implies |f(z) - L| < \varepsilon$$

$$\Delta Z = f(z + \Delta z) - f(z), \qquad \Delta z = \Delta x + i \Delta y$$

$$f'(z) = \frac{dZ}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta Z}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta X + i \Delta Y}{\Delta x + i \Delta y} = \underbrace{\frac{\partial X}{\partial x} + i \frac{\partial Y}{\partial x}}_{\Delta y = 0} = \underbrace{\frac{\partial X}{i \partial y} + \frac{\partial Y}{\partial y}}_{\Delta x = 0}$$

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y}, \quad \frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x} \qquad (1)$$

równania Cauchy - Riemanna
warunek konieczny i wystarczający istnienia pochodnej

Funkcję zmiennej zespolonej, która ma pochodną w każdym punkcie obszaru D, nazywamy funkcją holomorficzną w D.

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 Y}{\partial y \partial x} \qquad \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial y} \implies \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} = \Delta X = 0$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 X}{\partial y \partial x} \qquad \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 X}{\partial x \partial y} \implies \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = \Delta Y = 0 \qquad (2)$$

Każda funkcja $f(z) = X(x,y) + iY(x,y)$ holomorficzna w pewnym obszarze jest zespołem dwóch funkcji harmonicznych - stowarzyszonych w tym obszarze. Mając jedną z nich można określić drugą.

$$dY(x_i) = \frac{\partial Y}{\partial x_i} dx_i = \frac{\partial Y}{\partial x} dx + \frac{\partial Y}{\partial y} dy = -\frac{\partial X}{\partial y} dx + \frac{\partial X}{\partial x} dy \qquad \int dY = Y$$

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x,y)} dY = Y(x,y) - Y(x_0, y_0) = -\int_{x_0}^{x} \frac{\partial X(x, y_0)}{\partial y} dx + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial X(x_0, y)}{\partial x} dy$$

$$Y(x,y) = Y(x_0, y_0) - \int_{x_0}^{x} \frac{\partial X(x, y_0)}{\partial y} dx + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial X(x_0, y)}{\partial x} dy \qquad (3)$$

w pewnym otoczeniu punktu (x_0, y_0)

$(\ln z)' = \frac{1}{z}$ w każdym p. płaszczyzny bez punktów przekroju

$\cdot \; \cos z = \frac{1}{2}\left(e^{zi}+e^{-zi}\right) \qquad \cos(yi) = \frac{1}{2}\left(e^{-y}+e^{y}\right) = \cosh y$

$\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{zi}-e^{-zi}\right) \qquad \sin(yi) = \frac{1}{2}\left(e^{-y}-e^{y}\right) = -\frac{1}{2}\left(e^{y}-e^{-y}\right) = -\sinh y$

$\cos yi = \cosh y \qquad \sin(yi) = -\sinh y \qquad tg(yi) = -tgh\, y \qquad |E|$

<u>Funkcje hiperboliczne</u> zmiennej zespolonej $\sinh z$, $\cosh z$

$$\cosh z = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2} \qquad \sinh z = \frac{e^{z}-e^{-z}}{2} \qquad |E|$$

$\sinh(zi) = \frac{1}{2}\left(e^{zi}-e^{-zi}\right) = i \sin z \qquad \cosh(zi) = \frac{1}{2}\left(e^{zi}+e^{-zi}\right) = \cos z$

$\sin z = \frac{1}{i}\sinh(zi) \qquad \cos z = \cosh(zi) \qquad \sinh z = \frac{1}{i}\sin(zi) \qquad \cosh z = \cos(zi)$

$|F|$

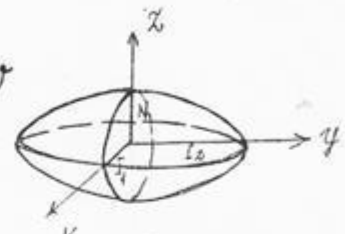
$Z = f(z)\,, \quad X+iY = f(x+iy)\,, \quad X = X(x,y)\,,\ Y = Y(x,y)$

<u>Funkcja logarytmiczna</u> zmiennej zespolonej

Jeżeli $e^{Z} = z$ to $\ln e^{Z} = \ln z$ $\quad Z = \ln z$ – funkcja ...

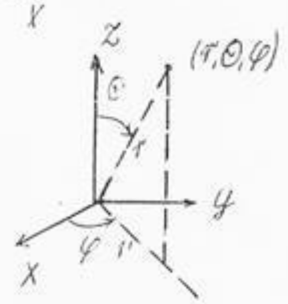
4. <u>Objętość elipsoidy o półosiach I_1, I_2, N</u>

$$\frac{x^2}{I_1^2} + \frac{y^2}{I_2^2} + \frac{z^2}{I_3^2} = 1 \qquad x = I_1 u,\ y = I_2 w,\ z = N v$$



$$u^2 + w^2 + v^2 = 1$$

$$J = \frac{D(x,y,z)}{D(u,w,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & N \end{vmatrix}$$



$$|J| = I_1 I_2 N \qquad V = \iiint_{E} dx\,dy\,dz = \iiint_{\pi} |J|\,du\,dw\,dv$$

$$V = I_1 I_2 N \iiint du\,dw\,dv = \underline{\underline{\frac{4}{3}\pi I_1 I_2 N}}$$

<u>Objętość kuli o promieniu R</u>

$x = r'\cos\varphi \quad y = r'\sin\varphi\,, \quad z = r\cos\Theta\,, \quad r' = r\sin\Theta$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \Theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \Theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \Theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\Theta\cos\varphi & r\cos\Theta\cos\varphi & -r\sin\Theta\sin\varphi \\ \sin\Theta\sin\varphi & r\cos\Theta\sin\varphi & r\sin\Theta\cos\varphi \\ \cos\Theta & -r\sin\Theta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^4(-r\sin\Theta\sin\varphi)\begin{vmatrix} \sin\Theta\sin\varphi & r\cos\Theta\sin\varphi \\ \cos\Theta & -r\sin\Theta \end{vmatrix} + (-1)^5(r\sin\Theta\cos\varphi)\cdot$$

$$\begin{vmatrix} \sin\Theta\cos\varphi & r\cos\Theta\cos\varphi \\ \cos\Theta & -r\sin\Theta \end{vmatrix} = -r\sin\Theta\sin\varphi(-r\sin^2\Theta\sin\varphi - r\cos^2\Theta\sin\varphi) +$$