Całka nieoznaczona

Funkcja F(x) nazywa się funkcją pierwotną funkcji f(x) lub całką z f(x) w danym przedziale, jeżeli w całym tym przedziale $F'(x) = f(x)$ lub $dF(x) = f(x)dx$

$$\int f(x)dx = F(x) \qquad d\int f(x)dx = dF(x) = f(x)dx \qquad dF = F'dx = f(x)dx$$

Przykład 1

$$\int \sin^3 x \cos x\, dx = \int \sin^3 x\, d\sin x = \int_{\sin x = t} t^3\, dt = \frac{t^4}{4} = \frac{1}{4}\sin^4 x$$

sprawdzenie $\frac{1}{4}\frac{d}{dx}\sin^4 x = \sin^3 x(\sin x)' = \sin^3 x\cos x$; $\frac{d}{dt}\left(\frac{t^4}{4}\right)\frac{dt}{dx} = t^3\cos x = \sin^3 x\cos x$

Przykład 2 $\int \sin^3 x\, dx = -\int \sin^2 x\, d\cos x = \int_{\cos x = t} (t^2 - 1)\, dt = \frac{t^3}{3} - t = \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x$

sprawdzenie $\frac{1}{3}\frac{d}{dx}\cos^3 x - \frac{d}{dx}\cos x = -\cos^2 x\sin x + \sin x = \sin x(1 - \cos^2 x) = \sin^3 x$

Przykład 3 $\int \ln^2 x dx = \int u^2 e^u du = \int u^2 de^u = u^2 e^u - \int e^u du^2 = u^2 e^u - 2\int ue^u du$

podstawiamy: $\ln x = u$, czyli z definicji logarytmu naturalnego $e^u = x$ i $e^u du = dx$;

natomiast wyrażenie $-2\int ue^u du = -2\int ude^u = -2ue^u + 2e^u$. Tak więc ostatecznie

$$\int \ln^2 x dx = u^2 e^u - 2ue^u + 2e^u = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x$$

sprawdzenie $\frac{d}{dx}(x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x) = \ln^2 x + x2\ln x\frac{1}{x} - 2\ln x - 2x\frac{1}{x} + 2 = \ln^2 x$

Przykład 4

$$\int e^x \sin x dx = -\int e^x d\cos x = -e^x\cos x + \int \cos x de^x = -e^x\cos x + e^x\sin x - \int e^x \sin x dx$$

ponieważ $\int \cos x de^x = \int \cos x e^x dx = \int e^x d\sin x = e^x\sin x - \int e^x \sin x dx$ stąd

$$2\int e^x \sin x dx = -e^x\cos x + e^x\sin x + 2C \quad \text{i} \quad \int e^x \sin x dx = \frac{1}{2}e^x(-\cos x + \sin x) + C$$

sprawdzenie $\frac{1}{2}\frac{d}{dx}e^x(\sin x - \cos x) = \frac{1}{2}[e^x\sin x - e^x\cos x + e^x\cos x + e^x\sin x] = e^x\sin x$

Całka oznaczona $\lim \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i \underset{\Delta x_i \to 0,\ n\to\infty}{=} \int_a^b f(x)dx = S$

$$S(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad m\Delta x < |\Delta S(x)| < M\Delta x \qquad m < \frac{|\Delta S(x)|}{\Delta x} < M \qquad |S'(x)| = \lim \frac{|\Delta S|}{\Delta x} \underset{\Delta x\to 0}{=} f(x)$$

Pochodna pola zmiennego $|S(x)|$ względem odciętej końcowej x jest równa rzędnej końcowej y=f(x). Jeżeli znamy funkcję pierwotną F(x) funkcji f(x), czyli $|S(x)| = F(x) + C$ to $S(a) = \int_a^a = F(a) + C = 0$

Gdy x=b $S = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Rozważmy funkcję $y = f(x) = ax^2$ $F(x) = \frac{1}{3}ax^3 = \frac{1}{3}xy$ $S = \int_0^b ax^2 dx = \frac{1}{3}ax^3 \Big|_0^b$