Analiza matematyczna w naukach o Ziemi

4 listopad 2006, godz. 11-13, wykł. 1

Matematyka, jej powstanie i rozwój – Mezopotamia, Sumer (nieprawdopodobne liczby, por. załącznik). Wkład Hellenów w rozwój geometrii: *Eudoksos* (408-365) – prace nad geometrią, aksjomat **1x=x** (*Archimedesa*), *Euklides* (365-300) – pierwsza aksjomatyczna, teoria dedukcyjna. Omówienie V aksjomatu – *przez punkt nie leżący na prostej można poprowadzić tylko jedną prostą równoległą.* Czy mogą być inne geometrie?

I. Prostokątny układ współrzędnych: *Rene Descartes i Pierre de Fermat.*

Umowy: **1.** - wskaźnik wolny, np. dla współrzędnej punktu $x_i\big|_{i=1,2,3}$, $x_i = \{x_1, x_2, x_3$; **2.** wskaźnik sumacyjny (niemy): $\Delta s^2 = \sum_{a=1}^{3} \Delta x_a \Delta x_a = \Delta x_a \Delta x_a = \delta_{ab} \Delta x_a \Delta x_b$ - przestrzenie dwu ($A,B,..$) trój ($a,b,..$) cztero (α, β,...) i n-wymiarowe ($a,b,...$).

Delta Kroneckera - definicja tradycyjna i postać macierzowa

$$\delta_{ab} = \begin{cases} 1 & a = b \\ 0 & a \neq b \end{cases} \quad ; \quad \delta_{ab} = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad /1/$$

Zwrócić uwagę na numerację wierszy i kolumn

Symbol zupełnie antysymetryczny

$$\epsilon_{klm} = \begin{cases} 1 & k \neq l \neq m \quad pp(1,2,3) \\ -1 & k \neq l \neq m \quad pn(1,2,3) \\ 0 & k = l \vee k = m \vee l = m \end{cases} \qquad \epsilon_{abk}\epsilon_{klm} = \delta_{al}\delta_{bm} - \delta_{am}\delta_{bl} \qquad /2/$$

Analizowany na wykładzie dowód o kontrakcji w materiałach drukowanych z zakresu tensorów kartezjańskich.

II. Macierze. Krótko o macierzach (*matrix* , *matrice*). Definicja macierzy. Podstawowe macierze na przykładzie macierzy dwuwskaźnikowych: *A – matrix*, A^T - *transpoze of a matrix*, $\overline{A}$ - *adjugate matrix*; A^+ - *Hermitanian matrix* (*Charles Hermite*, 1822-1901)

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}; \quad A^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \text{ -transponowana; } \quad \overline{A} = \begin{bmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ \overline{c} & \overline{d} \end{bmatrix} \text{ - sprzężona: } \quad a = a' + ia''$$

$\overline{a} = a' - ia''$ (*por. ćwiczenia z liczb zespolonych*) ; $A^+ = (\overline{A})^T = (\overline{A^T})$ - *hermitowsko sprzężona*, $(AB)^+ = B^+A^+$; A^{-1} - *odwrotna* . Gdy: $A^{-1} = \overline{A}^T = A^+$ - *macierz unitarna* ; $A^T = A^{-1}$ - *macierz ortonormalna* (*nieosobliwa rzeczywista macierz kwadratowa*).

Zdarzenia elementarne. Przestrzeń 4-wymiarowa *H. Minkowskiego*: $X^0 = ct, X^i = \{x, y, z$. Infinitezymalnie mała odległość dwóch zdarzeń: **1** – wysłanie impulsu świetlnego, **2** – jego rejestracja. Obserwacja tych zdarzeń z dwóch układów współrzędnych: współporuszającego się (związanego z np. rakietą) i „nieruchomego" (obserwator na Ziemi) prowadzi do relacji

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dl^2 \quad \rightarrow \quad d\tau = dt\sqrt{1 - v^2 / c^2} \quad (\text{gdzie } v = dl / dt) \ /?/$$

Metryczna forma kwadratowa: $ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dX^\alpha dX^\beta$. Postacie tensora metrycznego:

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad /3/$$

W pierwszym przypadku: *czterowymiarowa przestrzeń psudoeuklidesowa o indeksie* 1 ($\eta_{00} = -1$, $\eta_{ij} = \delta_{ij}$. W drugim – 4-*wymiarowa przestrzeń psudoeuklidesowa o indeksie* 3 ($\eta_{00} = 1$, $\eta_{ij} = -\delta_{ij}$.

Analiza wzoru: $d\tau = dt\sqrt{1 - v^2/c^2}$ paradoks bliźniaków. Analogia z czarnymi dziurami (rozmiary Ziemi i Słońca gdyby były czarnymi dziurami). Omówienie relacji $d\tau = dt\sqrt{1 - r_g/r}$ (analogia z poruszającą się rakietą).

III. Wyznaczniki. Krótko o wyznacznikach $|A| = \det a_{ik}$ (det –*déterminant*). Własności. Obliczanie wyznaczników. Różne sposoby: np. **1.** *wyznacznik stopnia n można rozłożyć wg. elementów I-tego wiersza zgodnie z wzorem* $\det a_{ik} = a_{I1}A_{I1} + a_{I2}A_{I2} + ... + a_{IN}A_{IN} = a_{Ip}A_{Ip}$ *lub analogicznie wg. J-tej kolumny* $\det a_{ik} = a_{1J}A_{1J} + a_{2J}A_{2J} + ... + a_{NJ}A_{NJ}$, gdzie $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ - jest dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ij} (*i – numer wiersza, j – kolumny*), natomiast M_{ij} - jest minorem elementu a_{ij}, czyli wyznacznikiem stopnia *n-1* otrzymanym z danego przez skreślenie *i –tego wiersza* i *j -tej kolumny.* Całkiem ogólnie wyznacznik można obliczyć z wykorzystaniem symbolu zupełnie antysymetrycznego: $\det A\big|_{p\times p} = \epsilon_{i_1 i_2 ... i_p} a_{1i_1}a_{2i_2}...a_{pi_p}$ /4/. Szczegółowo na przykładzie związanym z rozwiązaniem układu równań liniowych (por. poniżej – *układ Cramera*), którego wyznacznik $|A| = \det(a_{ij})$ obliczamy poniżej:

1. *Rozwinięcie wg. elementów np. pierwszego wiersza*

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\,(-1)^2\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1\,(-1)^3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1\,(-1)^4\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3\,(-1-6) - 1\,(2-3) - 1(4+1)$$

$$|A| = -21 + 1 - 5 = -25$$

2. *uproszczenie wyznacznika* (do trzeciej kolumny dodajemy drugą oraz do pierwszej drugą pomnożoną przez (-3)

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \\ -5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1\,(-1)^3\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = -15 - 10 = -25$$

3. *wg. schematu Sarrusa* (*Pierre Sarrus*, 1798-1861)

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{matrix} = -3 + 3 - 4 - 1 - 18 - 2 = -25$$

4. bezpośrednio z wzoru:

$$|A| = \in_{ijk} a_{1i}a_{2j}a_{3k} = \in_{123} a_{11}a_{22}a_{33} + \in_{231} a_{12}a_{23}a_{31} + \in_{312} a_{13}a_{21}a_{32} + \in_{132} a_{11}a_{23}a_{32} + \in_{321} a_{13}a_{22}a_{31}$$
$$+ \in_{213} a_{12}a_{21}a_{33} = -3+3-4-18-1-2 = -25$$

Układ równań liniowych *Cramera* (układ którego wyznacznik $|A| \neq 0$)

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1N}x_N = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2N}x_N = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nN}x_N = b_n \end{array} \qquad |A| = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad x_1 = \frac{D_1}{|A|}, x_2 = \frac{D_2}{|A|}, \ldots x_n = \frac{D_n}{|A|}$$

D_1, D_2, ... D_n są wyznacznikami w których odpowiednio kolumny 1,2,...,n zastąpiono kolumną wyrazów wolnych b_1 .... b_n

Przykład - rozwiązanie układu równań liniowych (wyznacznik $|A|$ obliczony powyżej)

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \end{cases} \quad |A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 9 & -1 & 3 \\ 8 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 8 & 1 \end{vmatrix} \quad D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 9 \\ 1 & 2 & 8 \end{vmatrix}$$

$$|A| = -25 \quad D_1 = -25 \quad D_2 = -50 \quad D_3 = -75 \quad x_1 = 1 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 3$$

Sprawdzian. Wykazać, że poniższy wyznacznik jest równy zeru (N - suma cyfr nazwiska, I – imienia). Sprawdzić stosując metodę rozwinięcia wg. elementów wybranego wiersza lub kolumny. Jakie twierdzenia wykorzystano by zaproponować ten wyznacznik o z góry założonej wartości 0? Podobny wyznacznik będzie jednym z 12-tu zadań na egzaminie.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & I \\ N & 2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 3 & -I \\ N & 2 & 7 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 \\ N & 2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 3 & -I \\ N & 2 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 4(-1)^4 \begin{vmatrix} N & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -I \\ N & 2 & -1 \end{vmatrix} = 4(-N+4-2IN+N+2IN-4) = 0$$

5 listopad 2006, godz. 8-9^{45}, wykł. 2

I. Iloczyn skalarny wektorów. $\vec{A} \bullet \vec{B} = A_k B_k$. The scalar product of two vectors $\vec{A}$ and $\vec{B}$ making an angle α two each other, is scalar calculated as $\vec{A} \bullet \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos(\vec{A},\vec{B}) = AB\cos\alpha$. Zauważmy, że z tej definicji wynika, że iloczyn skalarny wektorów bazy $\vec{e}_i \bullet \vec{e}_j = \delta_{ij}$. Tak więc iloczyn $\vec{A} \bullet \vec{B} = A_i\vec{e}_i \bullet B_j\vec{e}_j = A_iB_j \underbrace{\vec{e}_i \bullet \vec{e}_j}_{\delta_{ij}} = \delta_{ij}A_iB_j = A_iB_i = A_jB_j$. Zauważmy dalej, że

$$\vec{A} \bullet \vec{A} = A_kA_k = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = \vec{A}^2 = |\vec{A}|^2 = A^2 \qquad /4/$$

II. Iloczyn wektorowy. The vector product $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C}$, of vectors **A** and **B** making angle α, is a vector with modules $|\vec{C}| = C = |\vec{A}||\vec{B}|\sin\alpha$ /5/ and direction perpendicular to the plane determined by the vectors $\vec{A}$, $\vec{B}$, and in a sense such that the vectors $\vec{A}$, $\vec{B}$ and $\vec{C}$ make a right – handed system. Zauważmy, że: $\vec{A}\times\vec{B}=\vec{C}\ \rightarrow\ C_l=(\vec{A}\times\vec{B})\bullet\vec{e}_l=A_mB_n(\vec{e}_m\times\vec{e}_n)\bullet\vec{e}_l=$ $=\in_{lmn}A_mB_n$. Tak więc $(\vec{A}\times\vec{B})_l=\in_{lmn}A_mB_n$. I dalej

1. $\vec{A}\times\vec{B}=\vec{e}_k\in_{klm}A_lB_m=\vec{e}_1\underbrace{\in_{1lm}}_{\in_{123}+\in_{132}}A_lB_m+\vec{e}_2\underbrace{\in_{2lm}}_{\in_{213}+\in_{231}}A_lB_m+\vec{e}_3\underbrace{\in_{3lm}}_{\in_{312}+\in_{321}}A_lB_m=\vec{e}_1(A_2B_3-A_3B_2)+$
$$+\vec{e}_2(A_3B_1-A_1B_3)+\vec{e}_3(A_1B_2-A_2B_1) \qquad /5/$$
Tak więc: $(\vec{A}\times\vec{B})_1=A_2B_3-A_3B_2$, $(\vec{A}\times\vec{B})_2=A_3B_1-A_1B_3$, $(\vec{A}\times\vec{B})_3=A_1B_2-A_2B_1$

2. $(\vec{A}\times\vec{B})^2=(\vec{A}\times\vec{B})_k(\vec{A}\times\vec{B})_k=\in_{klm}A_lB_m\in_{kpq}A_pB_q=(\delta_{lp}\delta_{mq}-\delta_{lq}\delta_{mp})A_lB_mA_pB_q=A_lA_lB_mB_m-$ $-(A_lB_l)(A_lB_m)=\vec{A}^2\vec{B}^2-(\vec{A}\bullet\vec{B})^2$, co odpowiada znanej postaci wzoru z rachunku wektorowego: $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})^2+(\mathbf{AB})^2=\mathbf{A}^2\mathbf{B}^2=\mathrm{A}^2\mathrm{B}^2$

3. $(\vec{A}\bullet\vec{B})^2=(|\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta)^2=\vec{A}^2\vec{B}^2\cos^2\theta$, co uwzględniając w powyższym otrzymuje się
$$(\vec{A}\times\vec{B})^2=\vec{A}^2\vec{B}^2(1-\cos^2\theta)=A^2B^2\sin^2\theta=(AB\sin\theta)^2\ \rightarrow\ |\vec{A}\times\vec{B}|=|\vec{C}|=AB\sin\theta,$$
co odpowiada definicji /✪/ , określającej długość wektora $\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}$

Tożsamości

1. $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{A}\bullet\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}\bullet\vec{B})=\vec{e}_k\in_{klm}A_l\in_{mpq}B_pC_q=\vec{e}_k(\delta_{kp}\delta_{lq}-\delta_{kq}\delta_{lp})A_lB_pC_q=$
$$(B_k\vec{e}_k)(A_qC_q)-(C_k\vec{e}_k)(A_pB_p)$$
2. $(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}=(\vec{A}\bullet\vec{C})\vec{B}-(\vec{C}\bullet\vec{B})\vec{A}=\vec{e}_i\in_{ikl}\in_{kmn}A_mB_nC_l=-\vec{e}_i\in_{ilk}\in_{kmn}A_mB_nC_l=$
$$=-\vec{e}_i(\delta_{im}\delta_{ln}-\delta_{in}\delta_{lm})A_mB_nC_l=\underbrace{(\vec{e}_iB_i)}_{\vec{B}}\underbrace{(A_lC_l)}_{\vec{A}\bullet\vec{C}}-\underbrace{(\vec{e}_iA_i)}_{\vec{A}}\underbrace{(B_lC_l)}_{\vec{B}\bullet\vec{C}}$$
3. $\vec{A}\times[\vec{B}\times(\vec{C}\times\vec{D})]=(\vec{A}\times\vec{C})(\vec{B}\bullet\vec{D})-(\vec{A}\times\vec{D})(\vec{B}\bullet\vec{C})=\vec{e}_k\in_{kmn}A_m\in_{npq}B_p\in_{qrs}C_rD_s=$
$$=\vec{e}_k\in_{kmn}A_m(\delta_{nr}\delta_{ps}-\delta_{ns}\delta_{pr})B_pC_rD_s=\underbrace{(\vec{e}_k\in_{kmn}A_mC_n)}_{\vec{A}\times\vec{C}}\underbrace{(B_pD_p)}_{\vec{B}\bullet\vec{D}}-\underbrace{(\vec{e}_k\in_{kmn}A_mD_n)}_{\vec{A}\times\vec{D}}\underbrace{(B_pC_p)}_{\vec{B}\bullet\vec{C}}$$
tożsamości Lagrange'a (Teoria figury Ziemi).

Jeszcze metryczna forma kwadratowa:
$$\Delta s^2=\Delta x_a\Delta x_a=\Delta x_k^{'}\Delta x_k^{'}=c_{ka}c_{kb}\Delta x_a\Delta x_b=\delta_{ab}\Delta x_a\Delta x_b\ \rightarrow\ c_{ka}c_{kb}=\delta_{ab}$$
Przekształcanie współrzędnych: $\Delta x_k'=c_{ka}\Delta x_a$, gdy punkty OO' pokrywają się (rys. wyświetlenie) to $x_k'=c_{ka}x_a$. Definicje tensorów rzędu (walencji): 1,2, i N
$$A_k'=c_{kl}A_l \qquad T_{kl}'=c_{ka}c_{kb}T_{ab} \qquad T'_{i_1\ldots i_N}=c_{i_1j_1}\ldots c_{i_Nj_N}T_{j_1\ldots j_N} \qquad /6/$$

Tensory w geofizyce Podstawowe równania materiałowe elektrodynamiki i STS (***Symetrycznej Teorii Sprężystości***):
$$j_k=\sigma_{kl}E_l \qquad D_k=\varepsilon_{kl}E_l \qquad B_k=\mu_{kl}H_l \qquad E_k=\rho_{kl}E_l \qquad H_k=\nu_{kl}B_l$$
$$T_{ij}=c_{ijkl}S_{kl} \qquad S_{ij}=s_{ijkl}T_{kl} \qquad /7/$$
tu: $\vec{j}$ - wektor gęstości prądu, $\vec{E}$ - wektor natężenia pola elektrycznego, $\vec{H}$ - wektor natężenia pola magnetycznego, $\vec{D},\vec{B}$ - wektory indukcji elektrycznej i magnetycznej, $\boldsymbol{T}$ $(T_{ij}=T_{ji})$, $\boldsymbol{S}$

($S_{ij} = S_{ji}$) - symetryczne tensory naprężeń i deformacji. W relacjach /7/ współczynnikami proporcjonalności są odpowiednio symetryczne tensory: przewodnictwa (przewodności właściwej) $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, przenikalności elektrycznej $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ i magnetycznej $\mu_{ij} = \mu_{ji}$, oporności właściwej $\rho_{ij} = \rho_{ji}$ (tensor odwrotny do tensora przewodnictwa $\rho_{ij} = \sigma_{ij}^{-1}$, por. obliczanie macierzy odwrotnej), nieprzenikalności magnetycznej $\nu_{ij} = \mu_{ij}^{-1}$, sprężystości $c_{ijkl} = c_{jilk} = c_{klij}$ i sztywności $s_{ijkl} = c_{ijkl}^{-1}$ (takie same symetrie). Przypomnijmy, że uogólnione prawo Hooke'a $T_{ij} = c_{ijkl} S_{kl}$ jest najprostszą, ogólną relacją uwzględniającą anizotropię własności sprężystych ośrodka (np. skalnego). Tensor sprężystości c_{klmn} ma ogólnie $3^4=9^2=81$ współrzędnych. W następstwie symetrii - $c_{klmn} = c_{lkmn} = c_{mnkl}$ ilość niezależnych współrzędnych redukuje się z $81 \to 36 \to 21$. W przypadku kryształów trójskośnych wynosi 21.

Literatura: Omówienie i demonstracja t.1 i 3 serii EIT. Tom 3 – *Tadeusz Trajdos* (m.in. macierze, wyznaczniki i tensory); *Tadeusz Trajdos – Matematyka dla inżynierów; Gerhard Oertel – Stress and Deformation , A Handbook on Tensor in Geology.*
Aplikacje analizy tensorowej w fizyce i astrofizyce:
Maciej Sufczyński – Elektrodynamika, Witold Nowacki – Teoria niesymetrycznej sprężystości; Bernard F. Schutz – Wstęp do ogólnej teorii względności; Michał Heller – Teoretyczne podstawy kosmologii, Osobliwy Wszechświat.

Załącznik – **1.** Nieprawdopodobne liczby

Nawiązanie do zaginionych cywilizacji. Nieprawdopodobne liczby – Maurice Chatelain (Le temps et l'espace). Tabliczka z Niniwy i liczba 195 955 200 000 000.

195 955 200 000 000 : 31 556 926 (ilość sekund w roku 1900) = 6 209 578 lat
6 209 578 lat : 240 cykli = 25 873, 24253 ≅ **26 000** lat przyjmowany obecnie w zaokrągleniu czas precesji ziemskiej osi obrotu wokół „bieguna" ekliptyki, czyli **rok platoński**

Dokładniej rok platoński to 9 450 000 dni.
Dzieląc 9 450 000 : 365, 242199 (rok zwrotnikowy) = 25 873, 24254 lat

Chatelain zwrócił uwagę, że stała z Niniwy w jednym tylko przypadku wykazuje pewne niedokładności, mianowicie dla roku zwrotnikowego (odstęp czasu między kolejnymi przejściami Słońca przez punkt równonocy wiosennej). Ten odstęp czasu wynosi: 365, 242 199 dni . Różnica między tą liczbą a liczbą otrzymaną z wykorzystaniem stałej z Niniwy, wynosi 1, 0368 sek. na rok. Z badań (USA) okazuje się, że „w ciągu tysięcy lat" rok zwrotnikowy zmniejsza się o 0, 000 016 sek na rok. Dzieląc: 1.0368 : 0, 000 016 = **64 800** lat. Tak więc ponieważ rok zwrotnikowy zmniejsza się o 0, 000 016 sekund rocznie, więc znaleziona w bibliotece Assurbanipala wielka stała systemu słonecznego, została obliczona **64 800** lat temu.

Bardzo krótko sumeryjskie: **stopy** = 297 mm i **beru** = 36 000 stóp = 10 692 metry.
Sumerowie podawali, że średnia odległość między środkiem Ziemi a środkiem Księżyca wynosi: **36 000** beru = 384 912 km (384 402 km - aktualnie przez astrof. amerykańskich i 384 395 - astrof. francuskich)

2. Dowód, że $\in_{abk} \in_{klm} = \delta_{al}\delta_{bm} - \delta_{am}\delta_{bl}$ - w odrębnych materiałach, które będą udostępnione pod koniec I semestru. Szczegółowo będą omawiane w semestrze letnim.