Teoria mnogości

Georg Cantor (1845-1918), prof. w Halle; Wacław Sierpiński (1882-1969), prof. Uniw. J. Kazimierza (teoria mnogości, liczb, funkcji zmiennej rzeczywistej); Kazimierz Kuratowski (1896-1980), prof. Politech. Lwow., Uniw. War., PAN, w-ce prez. Międz. Unii Mat., (teoria mnogości, topologia)

Pojęcie zbioru jest pojęciem pierwotnym - nie jest definiowalne.
Jeżeli zbiór składa się z elementów $a, b, c, \dots$ $A = \{a, b, c, \dots\}$;
$a \in \{a, b, c, \dots\}$, $g \notin \{a, b, c, \dots\}$, $\{x, \varphi(x)\}$ - zbiór przed. x spełniających warunek $\varphi(x)$, tzn. po podstawieniu x w $\varphi(x)$ otrzymuje się zdanie prawdziwe.

Rachunek zdań - zaj. się zdaniami orzekającymi, tj. prawdziwymi (w. log. „1") lub fałszywymi (w. log. „0")

Funktory rachunku zdań

	nazwa zdania złożonego	sposób czytania	zapis symb.
1.	koniunkcja (iloczyn logiczny)	p „i" q	$p \wedge q$
	$1 \wedge 1 = 1$, $1 \wedge 0 = 0$, $0 \wedge 0 = 0$, $0 \wedge 1 = 0$		
2.	alternatywa (suma logiczna)	p „lub" q	$p \vee q$
	$1 \vee 1 = 1$, $1 \vee 0 = 1$, $0 \vee 1 = 1$, $0 \vee 0 = 0$		
3.	implikacja	jeżeli p to q	$p \Rightarrow q$
	$1 \Rightarrow 1 = 1$, $1 \Rightarrow 0 = 0$, $0 \Rightarrow 1 = 1$, $0 \Rightarrow 0 = 1$		

w mowie potocznej zdanie $p \Rightarrow q$ czyta się: z p wynika q
implikacja jest twierdzeniem: warunek, że p jest warunkiem wystarczającym by q; warunek, że q jest warunkiem koniecznym by p.

4.	równoważność	p wtedy i tylko wtedy gdy q jeżeli p to q i jeżeli q to p	$p \Leftrightarrow q$
	$1 \Leftrightarrow 1 = 1$, $1 \Leftrightarrow 0 = 0$, $0 \Leftrightarrow 1 = 0$, $0 \Leftrightarrow 0 = 1$		
5.	negacja (zaprzeczenie)	nie p	$\neg p$, $\sim p$, p'
6.	nierównoważność	p albo q	$p \veebar q$

6. cd. $\veebar$ funktor nierównoważności p albo q $p \veebar q$
przypisujemy mu wartość logiczną prawdy wtedy i tylko wtedy gdy oba zdania p i q mają różne wartości logiczne, jest więc $1 \veebar 1 = 0$ $1 \veebar 0 = 1$, $0 \veebar 1 = 1$, $0 \veebar 0 = 0$

7. funktor dysjunkcji lub dysjunkcji Sheffera (mat. ameryk.)
dysjunkcja nie p lub nie q p / q
$1/1 = 0$, $1/0 = 1$, $0/1 = 1$, $0/0 = 1$ przypisujemy mu z. wartość logiczną fałszu wtedy i tylko wtedy gdy oba zdania p i q są prawdziwe.

8. binegacja (jednoczesnego zaprzeczenia) ani p ani q $p \downarrow q$
$1 \downarrow 1 = 0$, $1 \downarrow 0 = 0$ $0 \downarrow 1 = 0$ $0 \downarrow 0 = 1$ przypisujemy mu wartość logiczną prawdy wtedy i tylko wtedy gdy oba zdania p i q są fałszywe

Funkcje zdaniowe jednej zmiennej

1. asercja p jest zdaniem prawdziwym, prawda, że p
p jest prawdą
2. negacja nie prawda, że p
nie p, p-jest fałszem $\neg p$ $\sim p$
$\neg 1 = 0$, $\neg 0 = 1$
3. funkcja zdaniowa mająca zawsze wartość log. prawdy
4. — // — fałszu

Funkcje zdaniowe dwu zmiennych (możliwych 16 przypadków)
Tworzy się je posługując się funktorami zdaniotwórczymi

Podstawowe prawa logiczne

prawo podwójnego przeczenia $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$ (1)

prawo wyłączonego środka $p \vee \neg p = 1$ (2)
z dwu zdań sprzecznych conajmniej jedno jest prawdziwe

prawo sprzeczności $\neg(p \wedge \neg p) = 1$ (3)
z dwu zdań sprzecznych co najmniej jedno jest fałszywe

prawo przechodniości równoważności $[(p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r)] \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow r)$

<u>prawo Claviusa</u> (sprowadzenie do niedorzeczności)

$$(\neg p \Rightarrow p) \Rightarrow p$$ jeżeli z „nie p wynika p to p" (5)

<u>prawo de Morgana</u> (August de Morgan 1806~1871) <u>dla alter-</u>

$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$$ <u>natywy</u> (reguła negacji) (6)

zaprzeczenie alternatywy jest równoważne koniunkcji jej zaprzeczeń

<u>prawo de Morgana</u> <u>dla koniunkcji</u> (reguła negacji)

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \tag{7}$$

zaprzeczenie koniunkcji jest równoważne alternatywie jej zaprzeczonych czynników

<u>prawa de Morgana dla kwantyfikatorów</u> uogólnienie praw (6) i (7) dla kwantyfikatora ogólnego i szczegółowego

$$\neg\left[\bigwedge_{x\in X} f(x)\right] \Leftrightarrow \left[\bigvee_{x\in X} \neg f(x)\right] \tag{8}$$

nie dla każdego x zachodzi f(x) wtedy i tylko wtedy gdy istnieje takie (x), że f(x) nie zachodzi

$$\neg\left[\bigvee_{x\in X} f(x)\right] \Leftrightarrow \left[\bigwedge_{x\in X} \neg f(x)\right] \tag{9}$$

nie istnieje x dla którego zachodzi f(x) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego x nie zachodzi f(x)

$$\neg \bigvee_{x\in X} \neg f(x) \Leftrightarrow \bigwedge_{x\in X} f(x) \tag{10}$$

$$\neg \bigwedge_{x\in X} \neg f(x) \Leftrightarrow \bigvee_{x\in X} f(x) \tag{11}$$

<u>Zbiory</u>

Definicja. Mówimy, że zbiór B zawiera się w zbiorze A, co zapisujemy $B \subseteq A$ wtedy i tylko wtedy, gdy każdy element zbioru B jest elementem zbioru A, tzn.

$$B \subseteq A \Leftrightarrow \bigwedge_{x} \left[(x\in B) \Rightarrow (x \in A)\right] \tag{12}$$

Powyższą zależność między zbiorami A i B nazywamy in-

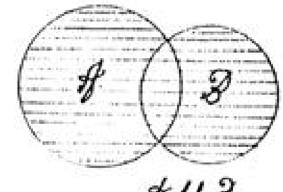
$\subseteq$ inkluzja, $\subset$ inkluzja silna $(B \subset A) \Leftrightarrow [(B \subseteq A) \wedge \bigvee_{a \in A} (a \notin B)]$

lub jeżeli przez $\not\subseteq$ oz. negację inkluzji $[(B \subseteq A) \wedge (A \not\subseteq B)]$

Algebra zbiorów

1. Suma zbiorów. Sumą mnogościową lub unią (unio - zjednoczenie) $X \in A \cup B \Leftrightarrow (X \in A) \vee (X \in B)$

$A \cup B \overset{df}{=} \{ x : (X \in A) \vee (X \in B) \}$ (13)



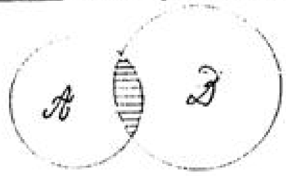
$A_i \ (i = 1, 2, \ldots, n)$, $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ $\bigcup_{i \in \{1, \ldots, n\}} A_i$

$(X \notin A \cup B) \Leftrightarrow (X \notin A) \wedge (X \notin B)$

$A \cup B$

2. Przekrój lub część wspólna zbiorów, iloczyn mnogościowy lub przecięcie $A \cap B$

$A \cap B \overset{df}{=} \{ x : (X \in A) \wedge (X \in B) \}$ (14)



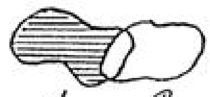
$X \in A \cap B \Leftrightarrow (X \in A) \wedge (X \in B)$

$A_i \ (i = 1, 2, \ldots, m)$, $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ $\bigcap_{i = \{1, \ldots, n\}} A_i$ $X \in \bigcap_{i = \{1, \ldots, n\}} A_i \Leftrightarrow \bigwedge_{i = \{1, 2, \ldots\}} X \in A_i$

przykład $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $B = \{1, 2, 5\}$ $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$A \cap B = \{1, 2, 5\}$

3. Różnica mnogościowa

$A \setminus B \overset{df}{=} \{ x : (X \in A) \wedge (X \notin B) \}$ (15)



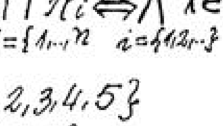
$A \setminus B$
$A - B$

$X \in A \setminus B \Leftrightarrow (X \in A) \wedge \neg (x \in B)$

Algebra zbiorów i algebra (rachunek) zdań to szczególne przypadki algebr Boola (Boole'a). Okazuje się, że dużo wcześniej bo w 1685 r. podobne wyniki uzyskali bracia Bernoulli (Georg Boole, 1815 ÷ 1864; 1847: An Investigation of the Laws of Thought, Badanie praw myślenia

4. Symetryczna różnica mnogościowa $A \dot{\setminus} B$

$A \dot{\setminus} B \overset{df}{=} \{ x : (X \in A \setminus B) \vee (X \in B \setminus A) \}$ (16)



$A \dot{\setminus} B$

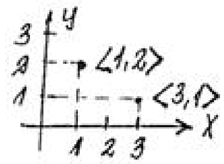
5. Dopełnienie zbioru A (względem zbioru 1)

$CA \overset{df}{=} 1 \setminus A$

$C(A \cup B) = CA \cap CB$ $C(A \cap B) = (CA \cup CB)$ prawa de Morgana Cf.

<u>Para uporządkowana</u>. Parą uporządkowaną $\langle x,y\rangle$ nazywamy zbiór dwuelementowy o ustalonej kolejności

$\langle x,y\rangle = \langle z,t\rangle \iff x=z \wedge y=t$

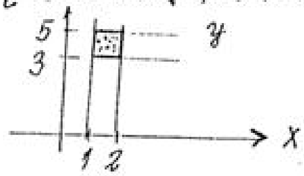


$\langle a,b\rangle \overset{df}{=} \{\{a\},\{a,b\}\}$ def. K. Kuratowskiego

<u>Iloczyn kartezjański</u> <u>(produkt) zbiorów</u> (łac. productus-wytworzony)

$A\times B = \{\langle x,y\rangle : x\in A \wedge y\in B\}$ produktem $A\times B$ nazywamy zbiór par uporządkowanych

1) $A=\{0,1,2\}$, $B=\{0,1\}$ wówczas: $A\times B = \{\langle 0,0\rangle,\langle 0,1\rangle,\langle 1,0\rangle,\langle 1,1\rangle,\langle 2,0\rangle,\langle 2,1\rangle\}$



2) $A=\{x: 1\leq x\leq 2\}$, $B=\{y: 3\leq y\leq 5\}$

$A\times B = \{\langle x,y\rangle : 1\leq x\leq 2 \wedge 3\leq y\leq 5\}$

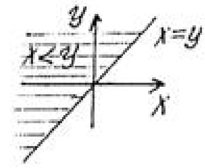
<u>Relacje</u> (relatio-doniesienie). Relacją na zbiorach A i B lub relacją między elementami tych zbiorów nazywa się podzbiór $\mathcal{R}$ ich iloczynu kartezjańskiego

$a\in A$, $b\in B$ $\quad a\mathcal{R}b \overset{df}{=} (a,b)\in\mathcal{R} \qquad \mathcal{R}\subset \bar{A}\times\bar{B}$

<u>Def.</u> Relacją dwuargumentową określoną w zbiorze E nazywa się relację będącą podzbiorem iloczynu kartezjańskiego $E\times E$

<u>przykład</u>. Iloczyn kartezjański zbioru R wszystkich liczb rzeczywistych przez siebie można utożsamiać z płaszczyzną. Jeżeli tak to dowolna relacja $\mathcal{R}$ na R jest pewnym podzbiorem płaszczyzny i odwrotnie każdy podzbiór płaszczyzny wyznacza pewną relację $\mathcal{R}$.

Relacja mniejszości $<$, $\mathcal{R} = \{\langle x,y\rangle \in R\times R : x<y\}$



<u>Definicja</u>

Relację dwuargumentową $\mathcal{R}$ w zbiorze E nazywamy relacją: <u>zwrotną</u> jeżeli $\bigwedge_{a\in E} a\mathcal{R}a$

<u>symetryczną</u> jeżeli $\bigwedge_{a,b\in E} a\mathcal{R}b \Rightarrow b\mathcal{R}a$ (lub refleksywną)

<u>przechodnią</u> lub tranzytywną jeżeli $\bigwedge_{a,b\in E} a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c \Rightarrow a\mathcal{R}c$

Funkcje (def. Giuseppe Peano (1859-1932), 1911)

Funkcją określoną na zbiorze X o wartościach w zbiorze Y nazywamy każdą relację określoną na zbiorze $X \times Y$ spełniającą warunki:

1° $\bigwedge_{a \in X} \bigvee_{b \in Y} \langle a,b \rangle \in \mathcal{R}$ dla każdego a ze zbioru X istnieje takie b w zbiorze Y, że para uporządkowana $\langle a,b \rangle$ należy do relacji $\mathcal{R}$

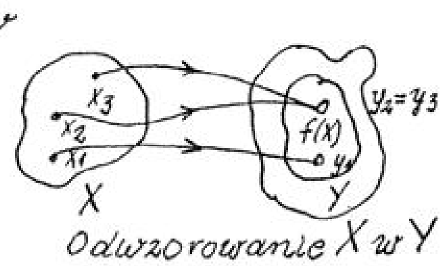
2° $\bigwedge_{a \in X} \bigwedge_{b \in Y} \bigwedge_{b' \in Y} [\langle a,b \rangle \in \mathcal{R} \wedge \langle a,b' \rangle \in \mathcal{R}] \implies b = b'$ (17)

dla każdego a ze zbioru X jeśli w zbiorze Y dwa dowolne elementy b i b' jednocześnie należą wraz z a do relacji $\mathcal{R}$ jako elementy par uporządkowanych $\langle a,b \rangle$ i $\langle a,b' \rangle$ – to elementy te są identyczne.

Warunek 1° można wypowiedzieć b. poglądowo: relacja $\mathcal{R}$ przyporządkowuje każdemu elementowi X conajmniej jeden element zbioru Y. Warunek 2° oznacza, że w zbiorze Y nie ma więcej niż jeden element przyporządkowany danemu elementowi zbioru X. Oba warunki 1° i 2° oznaczają, że każdemu $a \in X$, odpowiada dokładnie jedno $b \in Y$

Definicja Funkcją f określoną na zbiorze X o wartościach w zbiorze Y lub też odwzorowaniem f (przekształceniem zbioru X w zbiór Y) nazywamy przyporządkowanie każdemu elementowi x zbioru X dokładnie jednego elementu y zbioru Y; przyporządkowanie to zapisujemy $f: X \longrightarrow Y$ (18)

zbiór X nazywamy zbiorem argumentów lub dziedziną funkcji f; element $y \in Y$, który funkcja f przyporządkowuje elementowi $x \in X$ oznaczamy przez $f(x)$ i nazywamy wartością funkcji f na elemencie x.



Odwzorowanie X w Y

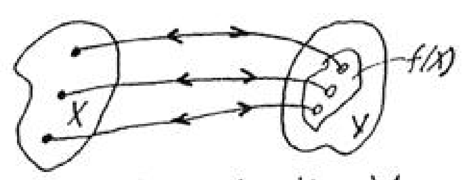
Element x nazywany jest też oryginałem a $f(x)$ jego obrazem przy przekształceniu f ($f(X) \equiv Im_f X := \{y \in Y : \bigvee_{x \in X} y = f(x)\}$

Iniekcja, suriekcja, bijekcja

1) Przekształcenie różnowartościowe (in-w, iniectio-łac.)

$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in X} [f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2$$

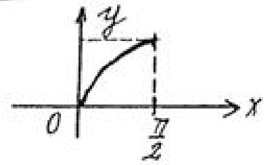
$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in X} [f(x_1) = f(x_2)] \Rightarrow x_1 = x_2$$



iniekcja: X w Y

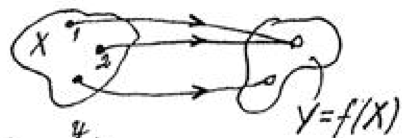
przykład. Funkcja $\sin: \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \rightarrow \langle 0; 1 \rangle$

f odwzorowywuje X w Y



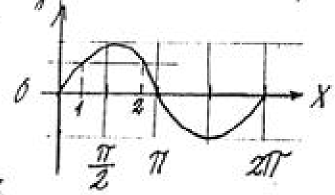
2) Suriekcja (sur) $f: X \rightarrow Y$ dla którego $Y = f(X)$

f odwzorowuje X na Y



przykład. Funkcja $\sin: \langle 0, 2\pi \rangle \rightarrow \langle -1; 1 \rangle$

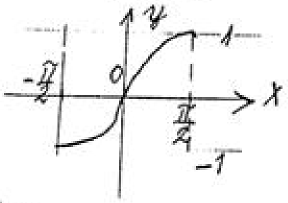
jest suriekcją zbioru $\langle 0, 2\pi \rangle$ na zbiór $\langle -1; 1 \rangle$



3) bijekcja

Przekształcenie będące jednocześnie iniekcją i suriekcją nazywa się bijekcją, czyli przekształceniem wzajemnie jednoznacznym „na"

przykład: przekształcenie $\sin: \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle \rightarrow \langle -1; 1 \rangle$ jest bijekcją



Złożenie lub superpozycja przekształceń f i g

Niech $f: X \rightarrow Y$ oraz $g: Y \rightarrow Z$. Złożeniem przekształceń f i g, oznaczanym przez $g \circ f: X \rightarrow Z$ nazywa się przekształcenie: $X \ni x \xrightarrow{g \circ f} z = g[f(x)] \in Z$

Twierdzenie. Jeżeli $f: X \rightarrow Y$ jest suriekcją, ~~to g∘f~~ oraz $g: Y \rightarrow Z$ jest suriekcją to $g \circ f: X \rightarrow Z$ jest także suriekcją

Niech $f: X \rightarrow Y = f(X)$ jest bijekcją wtedy przekształcenie $g: Y \rightarrow X = g(Y)$, takie, że $\bigwedge_{x \in X} g[f(x)] = x$ jest także bijekcją

Przekształcenie g spełniające powyższy warunek nazywa sie

Ciągłość funkcji

Niech f oznacza funkcję liczbową i niech $x_0 \in Df$ D - Dom
(Dom - domaine - dziedzina , Cf - $Codf$ Cod - codomain - współdziedzina , po polsku mówi się przeciwdziedzina)

Tw. Funkcja $f(x)$ jest ciągła w p. $x_0 \in D_f$ wtedy i tylko wtedy gdy $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Def. Cauchy'ego. Mówimy, że funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy (lim) $\bigwedge\limits_{\varepsilon>0} \bigvee\limits_{\delta>0} \bigwedge\limits_{x \in Df} |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

Tw. Cantora. Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale domkniętym $[a,b]$ to dla każdego $\varepsilon>0$ istnieje takie $\delta>0$, że dla każdych dwóch liczb z tego przedziału spełniających warunek $|x_1-x_2|<\delta$, spełniona jest nierówność $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$

Ciągłość jednostajna. Twierdzenie Cantora pozostaje w ścisłym związku z tym ważnym i subtelnym pojęciem
Niech funkcja f będzie ciągła na pewnym dowolnym przedziale X. Spełniony jest więc warunek następujący

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigwedge_{x_1 \in X} \bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{x_2 \in X} |x_1-x_2|<\delta \Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon \qquad /1/$$

warunek ten charakteryzuje ciągłość funkcji f w każdym punkcie $x_1 \in X$

Def. Funkcja f jest jednostajnie ciągła na przedziale X wtedy i tylko wtedy gdy

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{x_1 \in X} \bigwedge_{x_2 \in X} |x_1-x_2|<\delta \Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon \qquad /2/$$

δ z warunku /1/ istnieje dla każdego $\varepsilon>0$ i każdego $x_1 \in X$ oddzielnie, co nie zapewnia spełnienia /2/, który to warunek wymaga, żeby istniało δ dla każdego $\varepsilon>0$ wspólne dla wszystkich $x \in X$
Z warunku /2/ zawsze wynika /1/ ale nie odwrotnie.

Twierdzenie Cantora informuje, że każda funkcja ciągła na przedziale domkniętym $[a,b]$ jest na tym przedziale jednostajnie ciągła.

Tw. Darboux. Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale domkniętym $[a,b]^*$ to istnieje taki p. $c \in (a,b)$, że $f(c)=q$